

# De la chute des corps

**ou comment sonder un puits avec un bon gros caillou...**

**ou comment avoir l'air moins bête devant un très gros trou...**

**ou comment se faire mousser devant les copains...**

**ou comment s'y prendre quand on n'y connaît rien...**

*ou comment boucler le Spéléo-Dordogne à peu de frais...*

par Gilles Palué

## A. La théorie

Si on fait l'inventaire des forces  $\sum \vec{F}$  qui s'appliquent à la pierre dans le cadre de la chute libre (ce qui suppose des forces de frottement négligeables), on voit que cette dernière n'est soumise qu'à son propre poids :

$\vec{Poids} = m \cdot \vec{g}$  avec  $m$  masse d'inertie de la pierre et  $\vec{g}$  pesanteur ( $|\vec{g}| = \text{env. } 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  sur Terre), donc :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{g} \quad (1)$$

Or le théorème du centre d'inertie (2<sup>e</sup> loi de Newton) nous donne :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\gamma} \quad (2) \quad (\text{avec } \vec{\gamma} \text{ accélération de la pierre})$$

De (1) et (2) on tire :  $m \cdot \vec{\gamma} = m \cdot \vec{g}$ , soit après simplification :

$$\vec{\gamma} = \vec{g} \quad (3)$$

Comme  $\int \vec{\gamma} dt = \text{cte} \cdot \vec{\gamma} + \text{cte}$  et que  $|\vec{\gamma}| = g = \text{env. } 9,81 \text{ m.s}^{-2} = \text{constante}$ , on est bien en présence d'un

**mouvement uniformément accéléré**, et indépendant de la masse  $m$  de la pierre.

Puisque  $\vec{\gamma}$  est la dérivée par rapport au temps de la vitesse, (3) devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$$

qu'on intègre par rapport au temps :

$$\int \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right) dt = \int \vec{g} dt, \text{ soit :}$$

$$\vec{v} = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0 \quad (4) \quad (\text{avec } \vec{v}_0 \text{ vitesse initiale de la pierre})$$

Comme on ne peut pas quantifier  $\vec{v}_0$  concrètement sur le terrain, il est bien plus judicieux de se placer dans le cas particulier où elle est nulle. Ainsi :

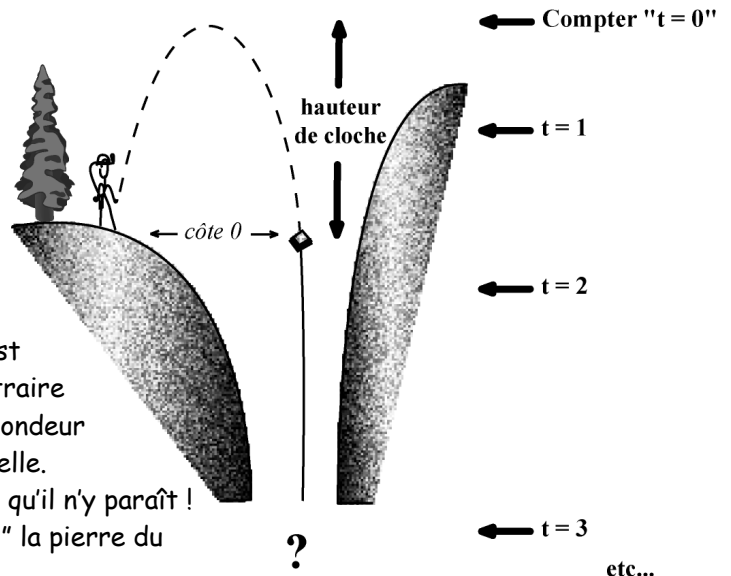
### condition :

**Si on lâche la pierre dans le vide sans lui imprimer de vitesse initiale**,  $\vec{v}_0$  devient nulle. C'est cependant peu pratique dans le cas d'un

gouffre entonnoir dont on ne peut s'approcher du bord, et encore moins se mettre à l'aplomb.

On peut néanmoins s'affranchir de cette difficulté en lançant la pierre "en cloche", car ainsi le moment où la pierre commence à retomber de son propre poids est justement l'instant  $t = 0$  pour lequel la vitesse initiale est nulle. Il suffira simplement de soustraire la "hauteur de la cloche" de la profondeur calculée pour avoir la profondeur réelle.

Attention, le lancer est moins facile qu'il n'y paraît !  
 Donc si on peut simplement "lâcher" la pierre du dessus, autant ne pas s'embêter...



Cette condition simplificatrice respectée, (4) devient :  $\vec{v} = \vec{g} \cdot t$  (5)

**Remarque :**

On constate que la vitesse de chute de la pierre ne dépend plus que du temps de chute que multiplie la constante  $g$ . **Elle n'est pas fonction de sa masse**, autrement dit en chute libre une grosse pierre bien lourde tombe aussi vite qu'une pierre plus légère, aussi paradoxal que cela puisse paraître...

Donc pas la peine de mégoter sur la taille du caillou : il faut juste qu'il soit assez gros pour que vous puissiez l'entendre une fois arrivé en bas !

Poursuivons donc notre petit travail d'intégration :

Si on définit un vecteur  $\vec{z}$  de telle sorte qu'il soit colinéaire à  $\vec{g}$  c'est à dire orienté vers le centre de la terre (ce qui n'a rien d'extravagant pour la trajectoire prise par une pierre dans le vide...),

et puisque  $\vec{v}$  est la dérivée par rapport au temps de ce vecteur position, (5) devient :  $\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{g} \cdot t$

qu'on intègre par rapport au temps :  $\int \left( \frac{d\vec{z}}{dt} \right) dt = \int \vec{g} \cdot t dt$  ,

soit :  $\vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2 + \vec{z}_0$  (6) (avec  $\vec{z}_0$  position initiale de la pierre)

L'œil averti reconnaît vite en  $\left| \frac{\vec{z}}{z_0} \right|$  la fameuse " hauteur de cloche " dont on croyait bien naïvement s'être débarrassé auparavant, et que l'horrible rigueur des mathématiques vient maintenant rappeler à notre négligence.

On est donc tenté de la réintégrer maintenant dans l'équation, et de compter le temps à partir du moment où la pierre repasse au niveau du sol...

Seulement voilà, à ce moment là la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  n'est plus nulle, et on quitte le cas particulier où nous nous étions confortablement installés, et par conséquent notre petite équation qui devient caduque.

On se tire élégamment de ce mauvais pas en se plaçant justement dans le cas décrit dans la condition vue plus haut, car vitesse et position initiales deviennent ainsi nulles au temps  $t=0$ .

(6) devient donc :  $\vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2$

dont on tire la valeur absolue :  $z = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \text{env. } \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 = 4,9 \cdot t^2$

et qu'on peut arrondir à :  $\boxed{z = 5t^2}$

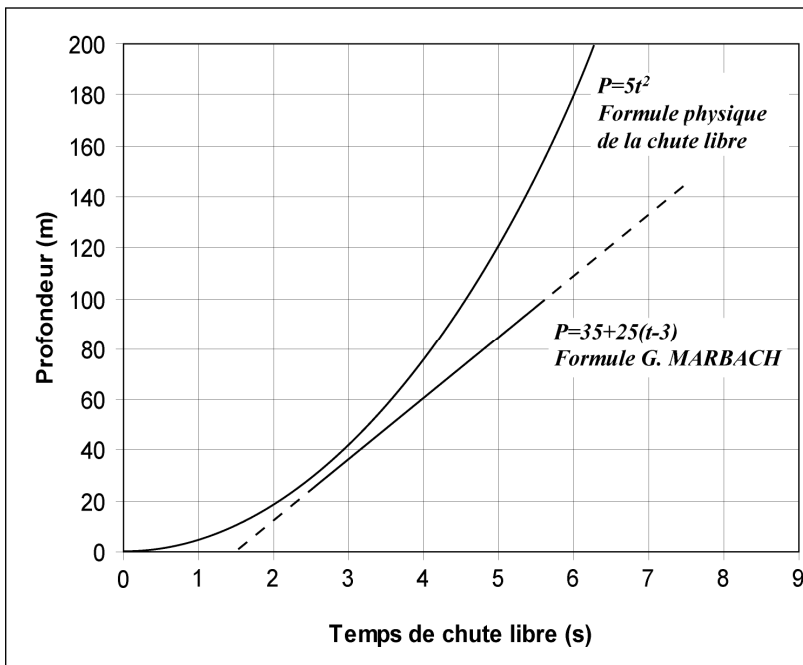
autrement dit, **la profondeur de chute n'est que fonction du temps écoulé.**

**Il convient cependant de bien respecter le champ d'application physique de la formule (cf. points suivants)**

## B. Applications pratiques

### B.1. Comparaison avec la formule donnée dans "le Marbach"

La formule  $P=35+25(t-3)$  est donnée pour le domaine d'application [25 - 100m] de profondeur. Il s'agit d'une portion de droite assez voisine de la formule théorique, bien qu'on s'en écarte de près de 50% passé la 5<sup>e</sup> seconde.



t	Chute libre	"Formule du Marbach"
1s.	5m.	/
2s.	20m.	/
2,6s.	33,8m.	25m.
3s.	45m.	35m.
4s.	80m.	60m.
5s.	125m.	85m.
5,6s.	157m.	100m.
6s.	180m.	/
etc...		/

Comparaison de la formule théorique de la chute libre et de celle empirique donnée dans "le Marbach".

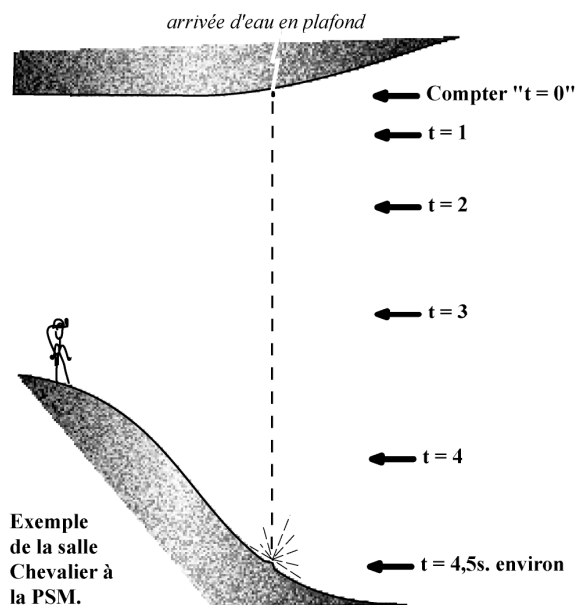
On constate que la formule du « Marbach » reste très bonne dans la plage de mesures que rencontre fréquemment le spéléologue.

### B.2. Estimation de la hauteur d'un plafond

L'exemple choisi est celui de la hauteur de plafond de la salle Chevalier (réseau de la Pierre-St-Martin). On observe en effet à plusieurs endroits de la salle plusieurs arrivées d'eau en plafond, dont il est très facile d'estimer la hauteur. Un projecteur est placé à proximité de sa base, éclairant l'arrivée d'eau tandis que l'observateur prend du recul. Résultat, au plus haut les gouttes mettent entre 4 et 5 secondes pour toucher le sol (qui n'est d'ailleurs pas le bas de la salle), ce qui nous donnerait d'après le calcul une hauteur de plafond entre  $P=5x(4s.)^2 = 80m.$  et  $P=5x(5s.)^2 = 125m.$ , ce qui semble cohérent.

En utilisant un chronomètre il serait possible d'affiner la mesure.

A noter que cette méthode n'est plus valide passé les 200m de hauteur, car le frottement de l'air sur les gouttes d'eau les divise et les freine jusqu'à ce que le phénomène de cohésion des molécules fausse le processus de chute libre<sup>2</sup>.



### B.3. Puits de la Fayolle (Nailhac-24)

Pour finir une petite anecdote pour montrer la portée limitée de la méthode : m'enfilant dans le minuscule laminoir de la Fayolle, je débouche à ma grande surprise au sommet d'un vaste puits (la doline

d'entrée s'ouvrait pourtant en fond de vallon, où coule même un petit ruisseau quelques centaines de mètres plus loin). Je décide de le sonder en y lançant une pierre en plein vide, et compte 3 secondes de chute (sans montre). Je fais le calcul suivant :  $3^2=9$  ;  $5 \times 9=45\text{m}$ .

Ressorti dehors tant bien que mal, j'arrondi et annonce un P40 à mes camarades qui ne me croient pas en me voyant le sourire jusqu'aux oreilles (je gagnerai ce jour là un repas au restaurant chez Bellingard avec les parieurs imprudents).

Plus tard, la topographie faite, le puits s'avèrera faire 29m. La pierre avait du mettre  $t = \sqrt{\frac{29}{5}} = 2,41\text{s}$ . Quelques dixièmes de secondes d'écart...

### Remarques importantes restreignant le champ d'application de cette formule :

- la formule est donnée pour le cas d'une chute libre, c'est à dire que rien ne vient en freiner la chute. Ce n'est pas tout à fait le cas dans la réalité car **le frottement de l'air intervient** selon la formule :

$$\vec{f} = -D \cdot v^2 \cdot \vec{u}_v \quad \text{et } D = k \cdot S \quad \text{avec } \begin{array}{l} \vec{f} \text{ force de frottement de l'air (de quelques m.s}^{-1} \text{ à } 200 \text{ m.s}^{-1}) \\ k \text{ fonction de la forme aérodynamique de la pierre (k diminue} \\ \rightarrow \text{ quand l'aérodynamisme augmente)} \\ \vec{u}_v \text{ vecteur unitaire colinéaire au vecteur vitesse} \\ S \text{ surface frontale de l'objet} \end{array}$$

Donc théoriquement la forme de la pierre et donc sa taille ne sont pas si négligeables que ça, même si en réalité elle n'a pas le temps d'atteindre une vitesse telle que cette source d'erreur deviendrait supérieure à celle engendrée par la mesure du temps par le spéléo, sauf si bien sûr on sonde le puits avec des objets tels que des cerfs-volants ou des assiettes en plastique...

- Dans le même ordre d'idée, si le frottement d'un fluide tel que l'air perturbe un peu la mesure, il en va tout autrement d'un frottement mécanique, quand le caillou touche une paroi ou quand il rebondit plus bas après un relais par exemple. Le transfert d'impulsion étant alors inquantifiable, il est impossible de savoir quelle est sa nouvelle vitesse.

***Il faut donc arrêter de compter à cet instant-là, et tout ce qu'on pourra dire c'est que le puits fait une profondeur d'au moins « tant » de mètres.***

- ***Faire attention à bien commencer le décompte à partir de zéro, et non pas de un***
- ***Pour les très grands puits, il faut théoriquement tenir compte du temps que va mettre le son pour remonter*** : par exemple dans un P350, le son met 1s pour remonter, seconde qu'il faut soustraire au temps de chute, ce qui change de beaucoup la profondeur vu qu'elle est fonction carré de celui-ci. Ainsi une formule plus juste serait :

$$P = 5(t_{\text{total}} - t_{\text{de remontée}})^2 \quad t = \sqrt{\frac{350}{5}} = 8,4\text{s}$$

Pour le P350, le temps de chute est *physiquement* de  $t = \sqrt{\frac{350}{5}} = 8,4\text{s}$ .  
On mesure donc en réalité  $8,4 + 1 = 9,4\text{s}$ .

Si on ne tient pas compte de ce temps de remontée du son, le calcul (erroné) donnera :  $P = 5 \times 9,4^2 = 440\text{m}$ , soit 90m de plus et dans les 25% d'erreur !

Pour un P100,  $t = \sqrt{\frac{100}{5}} = 4,47\text{s}$ . donc t réellement mesuré =  $4,47 + 0,27 = 4,74\text{s}$ ., et P (erronée) =  $5 \times 4,74^2 = 112\text{m}$   
Soit environ 10% d'erreur.

L'erreur diminue elle aussi en fonction carré du temps que met le son pour remonter.

Bref pour conclure, si vous trouvez un joli puits, la meilleure solution est encore celle dont on se rappelle le mieux :  **$5t^2$**  convient à merveille malgré ses imperfections.

Maintenant si vous trouvez un très grand puits et que vous ne savez pas trop par quel bout le sonder, le plus simple reste encore de m'inviter, je vous dirai combien il fait une fois atteint le fond !

### Notes / bibliographie :

<sup>1</sup> *Techniques de la spéléologie alpine*, Georges Marbach et Jean-Louis Rocourt, p. 168 de la nouvelle édition.

<sup>2</sup> B. Lismonde, *Aérologie des systèmes karstiques* t.2, concernant la chute des gouttes d'eau.